



基于 Kapteyn 级数展开的低复杂度大规模 MIMO 信道估计

王兵¹, 李正权^{1,2}, 燕锋¹, 沈连丰¹

(1. 东南大学信息科学与工程学院, 江苏 南京 210096;

2. 北京邮电大学网络与交换技术国家重点实验室, 北京 100876)

摘要: 为降低大规模 MIMO 信道估计的复杂度, 提出一种基于 Kapteyn 级数展开的信道估计方法。通过 Taylor 级数把协方差逆矩阵展开, 从而降低信道估计的复杂度。为提高 Taylor-MMSE 估计的收敛速度, 采用 Kapteyn 级数对协方差矩阵进行展开。仿真结果表明, Kapteyn-MMSE 估计的均方误差(MSE)收敛速度明显快于 Taylor-MMSE, 不足的是 Kapteyn-MMSE 复杂度略高于 Taylor-MMSE, 但仍远小于经典 MMSE 算法。

关键词: 信道估计; Taylor 级数; Kapteyn 级数; 多项式展开

中图分类号: TN911

文献标识码: A

doi: 10.11959/j.issn.1000-0801.2016324

Low-complexity channel estimation in massive MIMO based on Kaptyn series expansion

WANG Bing¹, LI Zhengquan^{1,2}, YAN Feng¹, SHEN Lianfeng¹

1. School of Information Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China

2. State Key Laboratory of Networking and Switching Technology, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China

Abstract: In order to reduce the complexity of the massive MIMO channel estimation, a channel estimation method based on Kapteyn series expansion was proposed. By using Taylor series to expand the inversion, the complexity was greatly reduced. In order to improve the Taylor-MMSE estimation of the convergence rate, Kapteyn series was used to expand covariance matrix. The simulation result shows that the mean square error of Kapteyn-MMSE estimation converges faster than Taylor-MMSE. It is insufficient that the complexity of Kapteyn-MMSE slightly higher than the complexity of Taylor-MMSE, but still far less than the complexity of classical MMSE algorithm.

Key words: channel estimation, Taylor series, Kapteyn series, polynomial expansion

收稿日期: 2016-11-10; 修回日期: 2016-12-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No.61571108, No.61471164); 东南大学移动通信国家重点实验室自主研究基金资助项目(No.2016B02); 网络与交换技术国家重点实验室(北京邮电大学)开放课题基金资助项目(No.SKLNST-2016-2-14)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.65171108), The Research Fund of National Mobile Communications Research Laboratory Southeast University (No.2016B02), Open Foundation of State Key Laboratory of Networking and Switching Technology (Beijing University of Posts and Telecommunications) (No.SKLNST-2016-2-14)



1 引言

多输入多输出(multiple input multiple output, MIMO)技术通过增加空间复用技术极大地提高了无线通信系统的频谱利用率^[1],这引发了学术界和工业界对基站装备天线的进一步研究。由于上下行信道间的互易性,对信道进行训练所需的代价仅与小区内移动用户数有关,而与天线的数量无关^[2]。因此当基站装备天线数趋于无穷大时,不仅不会给整个通信系统带来更大的开销,相反可以提高系统性能^[3]。

在大规模 MIMO 系统中,能否准确获取信道状态信息(channel state information, CSI)是进一步研究大规模 MIMO 系统的一个至关重要的因素。获取 CSI 的一种典型方法是通过发射导频信号,从接收信号中估计信道系数^[4]。当信道的统计特性已知时,可以通过 Bayesian(贝叶斯)MMSE(minimum mean square error)方法来估计信道系数。这一过程必然涉及对信道协方差矩阵的求逆运算,其复杂度是矩阵大小的 3 次方,当基站天线数增加时,这增加了矩阵求逆的复杂度。在传统的 MIMO 系统中,基站装备的天线数少,进行求逆运算复杂度是可以接受的^[5]。然而在研究大规模 MIMO 系统时,基站的天线数很大。如基站发射天线数设为 100,基站接收天线数设为 10,导致在利用 Bayesian MMSE 进行信道估计时,需要对维度为 1 000×1 000 的矩阵求逆,此时计算复杂度为 $O(1\ 000^3)$ 。本文的目的是通过多项式展开的方法来求解矩阵的逆,进而降低信道估计的复杂度。

多项式展开(polynomial expansion, PE)是一个减少高维矩阵求逆计算复杂度的有效方式。常用的多项式方式展开有 Taylor(泰勒)级数展开、Neumann(诺伊曼)级数展开等^[6,7]。多项式展开是通过用一个 L 维的矩阵多项式来近似矩阵函数,常用在检测或均衡等信号处理领域中。多项式维度 L 是在计算复杂度与估计性能平衡中选择的。目前的研究一般是利用 Taylor 级数进行多项式展开,这能够很好地降低算法的复杂度,但尚未有对算法收敛性的研究。本文采用 Kapteyn(卡普坦)级数进行多项式展开,发现在展开的多项式维度相同时, Kapteyn 级数展开方式可获得更好的估计性能。

2 信道模型

考虑在基站装备 N_t 根接收天线以及 N_r 根发射天线的 MIMO 信道模型,为了估计准静态平坦-衰落信道 $H \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ 的瞬时信道系数,把信道矩阵建为瑞利衰落模型: $\text{vec}(H) \sim$

$CN(\text{vec}(\bar{H}), R)$, 其中, $\bar{H}$ 为信道均值矩阵,信道协方差矩阵 $R \in \mathbb{C}^{N_r N_t \times N_r N_t}$ 是半正定的,用来描述空间通信传播质量。使用导频信号来进行信道估计^[8-11],即假设发送方发送一个预定的导频矩阵 $P \in \mathbb{C}^{N_t \times B}$,其中 B 表示导频序列的长度,满足 $B \geq N_t^2$ 。

定义接收机接收到的信号 $Y \triangleq [y(1), \dots, y(B)]$, 建立的系统模型如下:

$$Y = HP + N \quad (1)$$

其中, 噪声干扰 $N \in \mathbb{C}^{N_r \times B}$ 服从循环复高斯白噪声分布,其模型为 $\text{vec}(N) \sim CN(\text{vec}(\bar{N}), S)$, $\bar{N} \in \mathbb{C}^{N_r \times B}$ 为均匀分布噪声。 $S \in \mathbb{C}^{N_r B \times N_r B}$ 为噪声协方差矩阵,在大量文献中也常被称为导频污染。信道模型中信道协方差矩阵 R 和噪声协方差矩阵 S 假设是已知的。

利用向量化算子,将 H, N, Y 分别向量化为 $h = \text{vec}(H)$, $y = \text{vec}(Y)$, $n = \text{vec}(N)$,同时定义导频信号矩阵: $\tilde{P} \triangleq (P^T \otimes I)$, 其中单位矩阵 $I \in \mathbb{C}^{N_t \times N_t}$ 。将式(1)转化为规范的向量估计形式:

$$y = \tilde{P}h + n \quad (2)$$

如果接收端已知信道和噪声的统计特性,也即 R 和 S 在接收端是已知的,利用 Bayesian MMSE 估计 MIMO 信道为:

$$\hat{h}_{\text{MMSE}} = \bar{h} + R\tilde{P}^H (\tilde{P}R\tilde{P}^H + S)^{-1} (y - \tilde{P}\bar{h} - \bar{n}) \quad (3)$$

其中, $\bar{h} = \text{vec}(\bar{H})$, $\bar{n} = \text{vec}(\bar{N})$ 。下面计算信道估计的均方误差(mean square error, MSE),同时通过 MSE 来衡量估计性能:

$$MSE_{\text{MMSE}} = E \left\{ \left\| H - \hat{H}_{\text{MMSE}} \right\|_F^2 \right\} = \text{tr} \left(\left(R^{-1} + \tilde{P}^H S^{-1} \tilde{P} \right)^{-1} \right) \quad (4)$$

从式(4)来看,如果接收机知道信道和噪声的统计特性, MSE 是完全可以求出来的。不足的是式(4)涉及矩阵的求逆运算 $(\tilde{P}R\tilde{P}^H + S)^{-1}$,该运算在大规模 MIMO 系统中如果采用常规的求逆运算,其复杂度很高。本文的目的是通过多项式展开来优化矩阵求逆运算,使得在满足估计性能的前提下,降低计算复杂度。

3 低复杂度 MMSE 信道估计

在利用 Bayesian MMSE 进行信道估计时,离不开对矩阵进行求逆的操作,而求逆运算需要很高的复杂度,这在大规模 MIMO 中是不可行的^[11]。所以利用几种级数对求逆矩阵进行多项式展开来降低复杂度。

3.1 Taylor 级数多项式展开

根据 Taylor 级数定义,知道对于任何 Hermitian(埃尔米特)矩阵 $X \in \mathbb{C}^{M \times M}$,如果矩阵的特征值对于所有 $n \in N$ 都满足 $|\lambda_n(X)| < 1$,有:

$$(I - X)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} X^l \quad (5)$$

可以用长度为 L 的多项式展开来近似求得矩阵的逆,通常情况下 L 是远远小于矩阵大小的。对任意正定矩阵 X 和 $0 < \alpha < 2/\max(\lambda_n(X))$ 都有:

$$X^{-1} = \alpha(I - (I - \alpha X))^{-1} = \alpha \sum_{l=0}^L (I - \alpha X)^l + E \quad (6)$$

其中, E 为误差项,当 $X \rightarrow \infty$ 时, $E \rightarrow 0$ 。可以得到基于 Taylor 级数展开的低复杂度信道估计,定义如下:

$$\hat{h}_{\text{Taylor-MMSE}} \triangleq \bar{h} + R\tilde{P}^H \sum_{l=0}^L \alpha(I - \alpha(\tilde{P}R\tilde{P}^H + S))^l (y - \tilde{P}\bar{h} - \bar{n}) \quad (7)$$

利用 $MSE = E\{\|h - \hat{h}_{\text{Taylor-MMSE}}\|^2\}$ 计算得到如下 MSE 计算式:

$$MSE_{\text{Taylor-MMSE}} = \text{tr}(R + R\tilde{P}^H A_L (\tilde{P}R\tilde{P}^H + S) A_L^H \tilde{P}R - 2R\tilde{P}^H A_L \tilde{P}R) \quad (8)$$

其中, $A_L = \sum_{l=0}^L \alpha(I - \alpha(\tilde{P}R\tilde{P}^H + S))^l$ 。由于 α 决定多项式展开的收敛速度,在仿真中选择:

$$\alpha = \frac{2}{\max(\lambda_n(\tilde{P}R\tilde{P}^H + S)) + \min(\lambda_n(\tilde{P}R\tilde{P}^H + S))} \quad (9)$$

使得矩阵 $(I - \alpha(\tilde{P}R\tilde{P}^H + S))$ 的谱半径最小^[11],从而获得更快的收敛速率。

3.2 Kapteyn 级数多项式展开

依据 Kayteyn 级数定义^[16],对于任何正定矩阵 $X \in \mathbb{C}^{M \times M}$,如果矩阵的特征值对于所有 $m \in M$ 都满足 $|\lambda_m(X)| < 1$,有:

$$(I - X)^{-1} = I + 2 \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(I) \cdot J_n(nX) \quad (10)$$

其中, $Q_n(I) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{2^{n-2m-1} \cdot (n-2m)^2 (n-m-1)!}{m! n^{n-2m+1}}$,将式(10)写成求和形式以及将 $J_n(nX)$ 按照定义展开,得到:

$$\begin{aligned} (I - X)^{-1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n J_n(nX) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n X^n \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} J_n(k) X^{2k} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{其中, } w_n \text{ 定义为 } w_n &\triangleq \begin{cases} Q_0(I), & n=0 \\ 2Q_n(I), & n=1,2,\dots \end{cases}, J_n(k) = \\ &= \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{(n+k)!} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{2k+n} \end{aligned}$$

同理,得到:

$$\begin{aligned} X^{-1} &= \alpha[I - (I - \alpha X)]^{-1} \\ &= \alpha \sum_{n=0}^N w_n X^n \cdot \sum_{k=0}^K J_n(k) X^{2k} + E \end{aligned} \quad (12)$$

其中, E 为误差项,在 $N \rightarrow \infty, K \rightarrow \infty$ 时, $E \rightarrow 0$ 。然后得到基于 Kapteyn 级数展开的低复杂度信道估计,定义如下:

$$\hat{h}_{\text{Kapteyn-MMSE}} = \bar{h} + R\tilde{P}^H \sum_{n=0}^N \alpha w_n X^n \sum_{k=0}^K J_n(k) X^{2k} (y - \tilde{P}\bar{h} - \bar{n}) \quad (13)$$

其中, $X = I - \alpha(\tilde{P}R\tilde{P}^H + S)$ 。可以利用 $MSE = E\{\|h - \hat{h}_{\text{Kapteyn-MMSE}}\|^2\}$ 计算得到如下 MSE 计算式:

$$\begin{aligned} MSE_{\text{Kapteyn-MMSE}} &= \\ &= \text{tr}(R + R\tilde{P}^H B_N (\tilde{P}R\tilde{P}^H + S) B_N^H \tilde{P}R - 2R\tilde{P}^H B_N \tilde{P}R) \end{aligned} \quad (14)$$

其中, $B_N = \sum_{n=0}^N \alpha w_n X^n \sum_{k=0}^K J_n(k) X^{2k}$,为了方便与 Taylor 级数展开对比,参数 α 在实际仿真中的取值与 Taylor 级数展开中相同。

3.3 计算复杂度

在直接利用 MMSE 估计一个线性系统方程时,主要的复杂度在于对矩阵进行求逆,其复杂度为 $O(M^3)$, $M \triangleq BN_r$ 是矩阵的维度。在传统小规模 MIMO 系统 (2×2 的天线配置)中,其复杂度是很小的。

考虑用 Taylor 级数进行多项式展开时,可以采用递归算法计算^[11],这样只涉及矩阵向量的乘法,如:

$$\sum_{l=0}^L X^l d = d + X(d + X(d + X(\dots))) \quad (15)$$

式(15)的计算复杂度为 $O(M^2)$,可以看到复杂度从 $O(M^3)$ 降到了 $O(M^2)$ 。因此式(7)总的复杂度为 $O(LM^2)$, $M \triangleq BN_r$ 。总之,由于 $L \ll M$,相比于 MMSE 算法的 $O(M^3)$ 复杂度, $O(LM^2)$ 复杂度大幅度降低。

在利用 Kapteyn 级数进行多项式展开时,可以得到式(12)总的复杂度为 $O(NK^2M^2)$, $N \triangleq L, M \triangleq BN_r$ 。同样的,因为 $N \ll M, K \ll M$,相比于 MMSE 算法复杂度来说, $O(NK^2M^2)$ 的复杂度同样大幅度降低。然而与 Taylor 级数展开得到的 $O(LM^2)$ 复杂度相比, $O(NK^2M^2)$ 复杂度略有增加,但 K 与 N 大小相近。这样做带来的好处是提高估计的



收敛速度。

对上面 3 种对信道估计方法计算复杂度进行总结,见表 1。

表 1 3 种信道估计器复杂度对比

信道估计器	计算复杂度
MMSE	$O(B^3 N_t^3)$
Taylor-MMSE	$O(LB^2 N_t^2)$
Kapteyn-MMSE	$O(LK^2 B^2 N_t^2)$

4 仿真分析

通过仿真来具体分析 Taylor-MMSE 以及 Kapteyn-MMSE 的性能。设 $N_t=100, N_r=10$, 同时注意到信道和干扰的均值与计算 MSE 是没有关系的, 所以文中采用的是零均值进行计算的。于是通过 Kronecker 模型^[12,13]来描述信道的协方差系数, 因此 MIMO 信道协方差矩阵为 $R=R_t \otimes R_r$, 其中 $R_t \in \mathbb{C}^{N_t \times N_t}$ 为发射端的协方差矩阵, $R_r \in \mathbb{C}^{N_r \times N_r}$ 表示接收端的协方差矩阵。

由于蜂窝小区间存在导频污染, 干扰的协方差矩阵建模为:

$$S = \sum_{i \in I} \tilde{P} \Sigma_i \tilde{P}^H + \sigma^2 I \quad (16)$$

其中, Σ_i 表示小区 i 的信道协方差矩阵。同样通过 Kronecker(克罗内克积)模型, 可以得到 $\Sigma_i = \sqrt{\beta_i} \Sigma_{t_i} \otimes \sqrt{\beta_i} \Sigma_{r_i}$, 其中, β_i 表示小区 i 导频污染程度, 当 $\beta_i=0$ 时, 说明不存在导频污染; 当 $\beta_i=1$ 时, 说明导频污染最严重。

利用参考文献[12-14]指数相关模型得到上述的协方差矩阵, 主要考虑两个小区导频污染 $i=1, 2$ 。利用下面的参数可计算出协方差矩阵 R_t, R_r, Σ_t 和 Σ_r :

$$\begin{aligned} r_{t1} &= 0.4e^{-j0.934 \ 9\pi}, & r_{r1} &= 0.9e^{-j0.928 \ 9\pi} \\ \sigma_{t,1} &= 0.35e^{-j0.853 \ 7\pi} & \sigma_{r,1} &= 0.9e^{-j0.746 \ 4\pi} \\ \sigma_{t,2} &= 0.4e^{-j0.458 \ 3\pi} & \sigma_{r,1} &= 0.9e^{-j0.264 \ 9\pi} \end{aligned} \quad (17)$$

同时定义 $SNR = \frac{P_t}{\sigma^2}$, 其中 $P_t = \frac{1}{B} \text{tr}(P^H P)$ 为导频矩阵的平均功率。为了衡量 3 种方法的性能优劣, 采用标准 MSE 作为衡量指标, 定义为 $\frac{MSE}{\text{tr}(R)}$ 。另外, 在仿真时, 采用的导频矩阵为 $P = \sqrt{P_t} I$ 。

图 1 描述的是 MSE 与多项式阶数 L 之间的关系。 $\beta=0$ 表示不存在导频污染, 只考虑噪声受限的情况; $\beta=0.1$ (仿真中 $\beta_1=\beta_2=\beta$) 表示 2 个干扰小区的干扰信道强度比实际信道

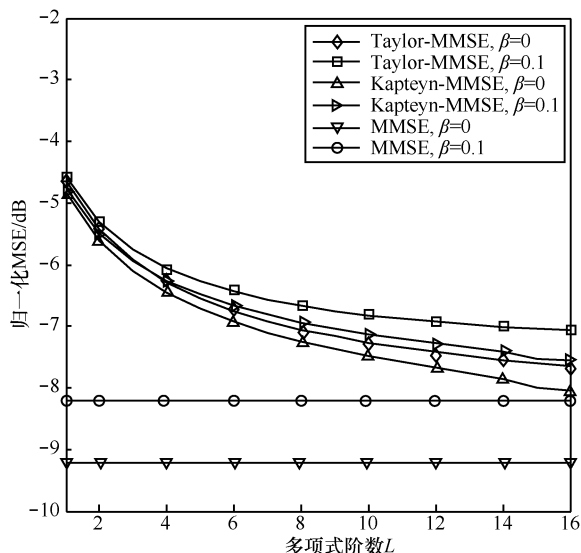


图 1 在不同场景下 3 种不同估计方法的 MSE 与多项式阶数的关系

强度弱 10 dB。仿真中假设的信道强度为 $\gamma=5$ dB。可以看出, 随着多项式阶数 L 增加, Taylor-MMSE 和 Kapteyn-MMSE 都呈下降趋势, 随着阶数的增加, 越接近 MMSE 估计的 MSE, 同时还可以看到 Kapteyn-MMSE 的下降速度明显比 Taylor-MMSE 下降速度快, 这说明 Kapteyn 级数展开收敛性比 Taylor 级数展开收敛性好。另外对比 $\beta=0, \beta=0.1$ 两种情况, 说明导频污染环境的估计性能略差于无导频污染环境。

图 2 描述的是在固定阶数 $L=10$ 条件下, 不同的估计方法随着 SNR 的不同, 在有导频污染情况下的性能。可以看出, 在无导频污染也即 $\beta=0$ 时, MMSE 算法估计的 MSE 随着 SNR 增加而逐渐趋于 0; 然而当 $\beta=0.1$ 时, MMSE 算法估计的 MSE 随着 SNR 增加会趋于平稳。然而对于 Taylor-MMSE 和 Kapteyn-MMSE 估计的 MSE 不管是否存在导频污染时, 其 MSE 随着 SNR 增加趋于平稳, 同时图 2 表明导频污染对 Taylor-MMSE 估计和 Kapteyn-MMSE 估计影响较小。

5 结束语

大规模 MIMO 技术能够很好地提高无线通信系统的能量使用效率和频谱效率。能否快速准确地获取信道状态信息 CSI 是应用大规模 MIMO 技术的一个关键技术难题。由于经典的 Bayesian MMSE 进行信道估计对于大规模 MIMO 来说是不适用的, 复杂度太高, 所以先使用 Taylor 级数展开多项式来近似求出 MMSE 中的协方差逆矩阵, 随着展开阶数 L 的增加, Taylor-MMSE 估计的 MSE 会逐渐收敛

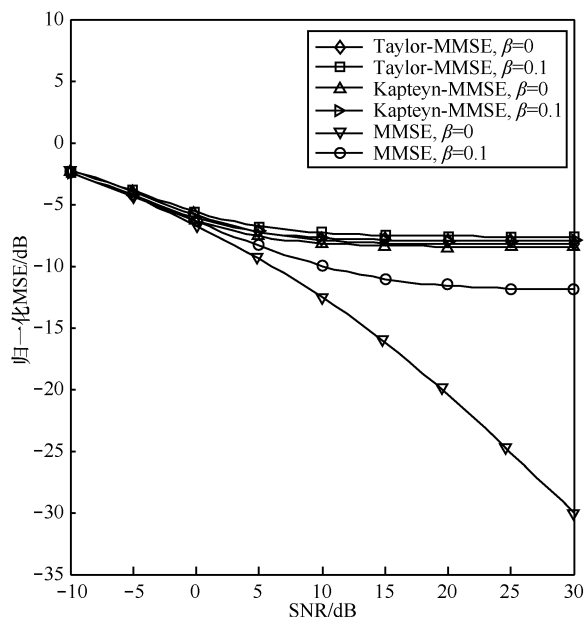


图2 在不同场景下3种估计方法MSE与SNR之间的关系

于MMSE估计的MSE。为了增加Taylor-MMSE的收敛性,提出了通过Kapteyn级数多项式级数进行展开,可以看出Kapteyn-MMSE估计的收敛性要好于Taylor-MMSE估计,不足的是Kapteyn-MMSE的复杂度要高于Taylor-MMSE,但其复杂度还是远远小于传统的MMSE估计。

参考文献:

- [1] RUSEK F, PERSSON D, LAU B K, et al. Scaling up MIMO: opportunities and challenges with very large arrays [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2012, 30(1): 40-60.
- [2] HOYDIS J, BRINK S T, DEBBAH M. Massive MIMO in the UL/DL of cellular networks: how many antennas do we need[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2013, 31(2): 160-171.
- [3] SONG N, ZOLTOWSKI M D, SUNG Y, et al. Training signal design for channel estimation in massive MIMO systems[C]// 14th ICASSP, May 4-9, 2014, Florence, Italy. New Jersey: IEEE Press, 2014: 6499-6503.
- [4] BOGALE T E, LE L B. Pilot optimization and channel estimation for multiuser massive MIMO systems[J]. Eprint Arxiv, 2014: 1-6.
- [5] MARZETTA T L. Noncooperative cellular wireless with unlimited numbers of base station antennas [J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2010, 9 (11): 3590-3600.
- [6] JOSE J, ASHIKHMIN A, MARZETTA T L, et al. Pilot contamination and precoding in multi-cell TDD systems [J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2011, 10(8): 2640-2651.

- [7] ZHAO L, LI K, ZHENG K, et al. An analysis of the tradeoff between the energy and spectrum efficiencies in an uplink massive MIMO-OFDM system[J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems II Express Briefs, 2015, 62(3): 291-295.
- [8] JIN S, WANG J, SUN Q, et al. Cell coverage optimization for the multicell massive MIMO uplink [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2015, 64(12).
- [9] ZHAO L, ZHENG K, LONG H, et al. Performance analysis for downlink massive multiple-input multiple-output system with channel state information delay under maximum ratio transmission precoding[J]. IET Communications, 2014, 8(3): 390-398.
- [10] PRABHU H, RODRIGUES J, EDFORS O, et al. Approximate matrix inverse computations for very-large MIMO and applications to linear pre-coding systems[J]. Antenna, 2013: 2710-2715.
- [11] SHARIATI N, BJORNSSON E, BENGTTSSON M, et al. Low-complexity polynomial channel estimation in large-scale MIMO with arbitrary statistics[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2013, 54(4): 1932-4553.
- [12] PRABHU H, EDFORS O, RODRIGUES J, et al. Hardware efficient approximate matrix inversion for linear pre-coding in massive MIMO[M]. [S.l.:s.n.], 2014.
- [13] BASNAYAKA D A, SMITH P J, MARTIN P A. Performance analysis of macrodiversity MIMO systems with MMSE and ZF receivers in Flat Rayleigh Fading [J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2013, 12(5): 2240-2251.
- [14] YIN H, GESBERT D, FILIPPOU M, et al. A coordinated approach to channel estimation in large-scale multiple-antenna systems[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2012, 31(2): 264-273.

[作者简介]



王兵(1991-),男,东南大学信息科学与工程学院硕士生,主要研究方向为MIMO技术和短距离无线通信。

李正权(1976-),男,博士,东南大学移动通信国家重点实验室教授,主要研究方向为MIMO技术、空时编码和协作通信。

燕锋(1983-),男,博士,东南大学副研究员,主要研究方向为无线传感器网络、异构网络等。

沈连丰(1952-),男,东南大学教授、博士生导师,主要研究方向为宽带移动通信、短距离无线通信和泛在网络等。